La science quantique

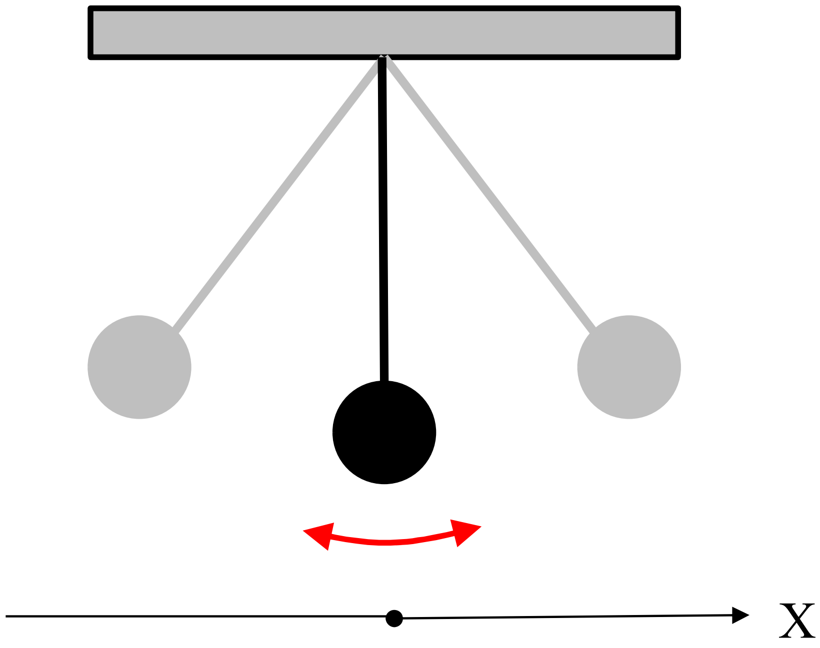
Une vision singulière

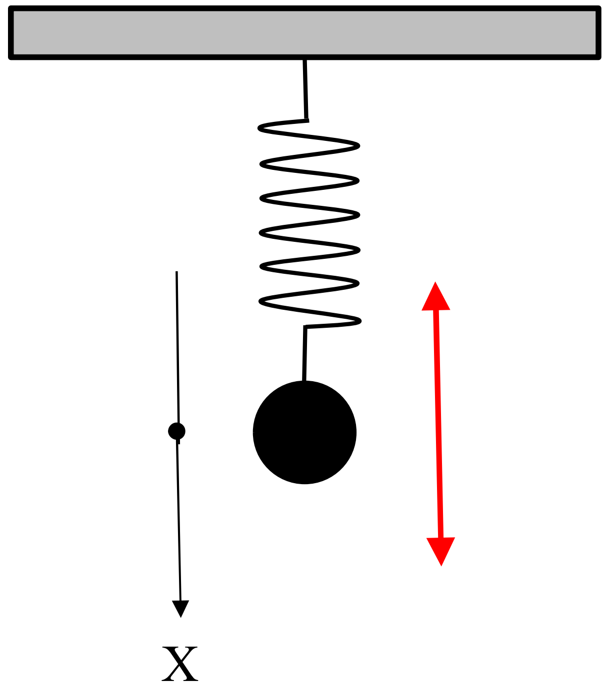
VIII) Oscillateur harmonique

P.A. Besse

Oscillateur harmonique mécanique: Ecriture normalisée

Oscillateur harmonique





$$E_{cin} \approx \left(\dot{X}\right)^2$$

$$E_{pot} \approx X^2$$

$$\Longrightarrow \quad X(t) \approx \cos\left(\omega \cdot t\right)$$

PAB

Hamiltonien mécanique: Variables canoniques q et p

Vibrations cristallines («phonons»): Oscillations de l'énergie cinétique à l'énergie potentielle

$$H = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} \kappa X^2$$

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Variables canoniques: $q \equiv X$ $\quad p = m \cdot \dot{X}$ $\quad \Rightarrow \quad [q, p] = i\hbar$

$$\boxed{H = \frac{1}{2} \frac{1}{m} p^2 + \frac{1}{2} \kappa q^2}$$

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

Hamiltonien mécanique:
Variables canoniques normées Q, P

Variables canoniques normées et fréquence d'oscillation

$$Q \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{\hbar\omega}} \cdot q \qquad\qquad P \equiv \sqrt{\frac{1}{m\,\hbar\omega}} \cdot p$$

$$\left[q, p\right] = i\hbar \quad \Rightarrow \quad \left[Q, P\right] = i \qquad\qquad P = -i\frac{\partial}{\partial Q}\ldots$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{1}{m}p^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2 \quad = \hbar\omega \cdot \frac{\left(P^2 + Q^2\right)}{2}} \qquad\qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

Opérateurs de création

et d'annihilation

PAB

Opérateurs de création et d'annihilation

$$\boxed{H = \hbar\omega \cdot \frac{\left(P^2 + Q^2\right)}{2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

$$[Q, P] = i$$

$$P = -i\frac{\partial}{\partial Q}\ldots$$

«Opérateur de création»:

$$a_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q - \frac{\partial}{\partial Q}\right)$$

«Opérateur d'annihilation»:

$$a_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q + \frac{\partial}{\partial Q}\right)$$

$$\boxed{\left[a_-, a_+\right] = 1}$$

$$\boxed{H = \hbar\omega \cdot \left(\frac{a_+ \, a_- + a_- \, a_+}{2}\right) = \hbar\omega \cdot \left(a_+ \, a_- + \frac{1}{2}\right)}$$

PAB

Hamiltonien de type: «oscillateur harmonique»

Considérons un hamiltonien de la forme: $$H = \hbar\omega \cdot \left(a_+ a_- + \tfrac{1}{2} \right)$$

avec: $$\left[a_- \, , \, a_+ \right] = 1$$ et $$a_+^\dagger = a_-$$

Résoudre et déterminer la fonction d'onde du vide $|\varphi_0\rangle$:

$$a_- \cdot |\varphi_0\rangle = 0$$

avec: Normée $$\langle \varphi_0 \| \varphi_0 \rangle = 1$$

$$a_- |\varphi_0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (Q + iP) \cdot |\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q \cdot |\varphi_0\rangle + \frac{\partial}{\partial Q} |\varphi_0\rangle \right) = 0$$

Mode et énergie du vide

Mode du vide:

$$a_- \cdot |\varphi_0\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial Q}|\varphi_0\rangle = -Q \cdot |\varphi_0\rangle \quad \Rightarrow \quad |\varphi_0\rangle = A_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}Q^2}$$

$$\langle\varphi_0||\varphi_0\rangle = 1 \quad \Rightarrow A_0 = \frac{1}{\sqrt{\int e^{-Q^2}dq}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\kappa}}\int e^{-Q^2}dQ}} = \left(\frac{\kappa}{\pi\,\hbar\omega}\right)^{1/4}$$

Energie du vide:

$$H \cdot |\varphi_0\rangle = \hbar\omega \cdot \Big(a_+ \underbrace{a_- \cdot |\varphi_0\rangle}_{=0}\Big) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega \cdot |\varphi_0\rangle = E_0 \cdot |\varphi_0\rangle$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{E_0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega}$$

Fonction d'onde pour n-bosons

Supposons que les fonctions d'onde ont la forme:

$$\left|\varphi_n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot a_+ \cdot \left|\varphi_{n-1}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot a_+^n \cdot \left|\varphi_0\right\rangle \qquad n = 1, 2, \ldots \infty$$

Hamiltonien:

$$H \cdot \left|\varphi_n\right\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{n!}} \cdot \left(a_+ a_- a_+^n \cdot \left|\varphi_0\right\rangle\right) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega \cdot \left|\varphi_n\right\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{n!}} \cdot \left(a_+ a_- a_+ a_+^{n-1} \cdot \left|\varphi_0\right\rangle\right) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega \cdot \left|\varphi_n\right\rangle$$

$$= \frac{\hbar\omega}{\sqrt{n!}} \cdot \left(a_+ \left(a_+ a_- + 1\right) a_+^{n-1} \cdot \left|\varphi_0\right\rangle\right) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega \cdot \left|\varphi_n\right\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{n!}} \cdot \left(a_+^2 a_- a_+^{n-1} \cdot \left|\varphi_0\right\rangle + a_+^n \cdot \left|\varphi_0\right\rangle\right) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega \cdot \left|\varphi_n\right\rangle$$

$$= \ldots = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{n!}} \cdot \left(a_+^{n+1} \underbrace{a_- \cdot \left|\varphi_0\right\rangle}_{=0} + n \cdot a_+^n \cdot \left|\varphi_0\right\rangle\right) + \tfrac{1}{2}\hbar\omega \cdot \left|\varphi_n\right\rangle = \hbar\omega \cdot \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \left|\varphi_n\right\rangle$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\left|\varphi_n\right\rangle \text{ est un mode propre d'énergie } \quad E_n = \hbar\omega \cdot \left(n + \tfrac{1}{2}\right)}$

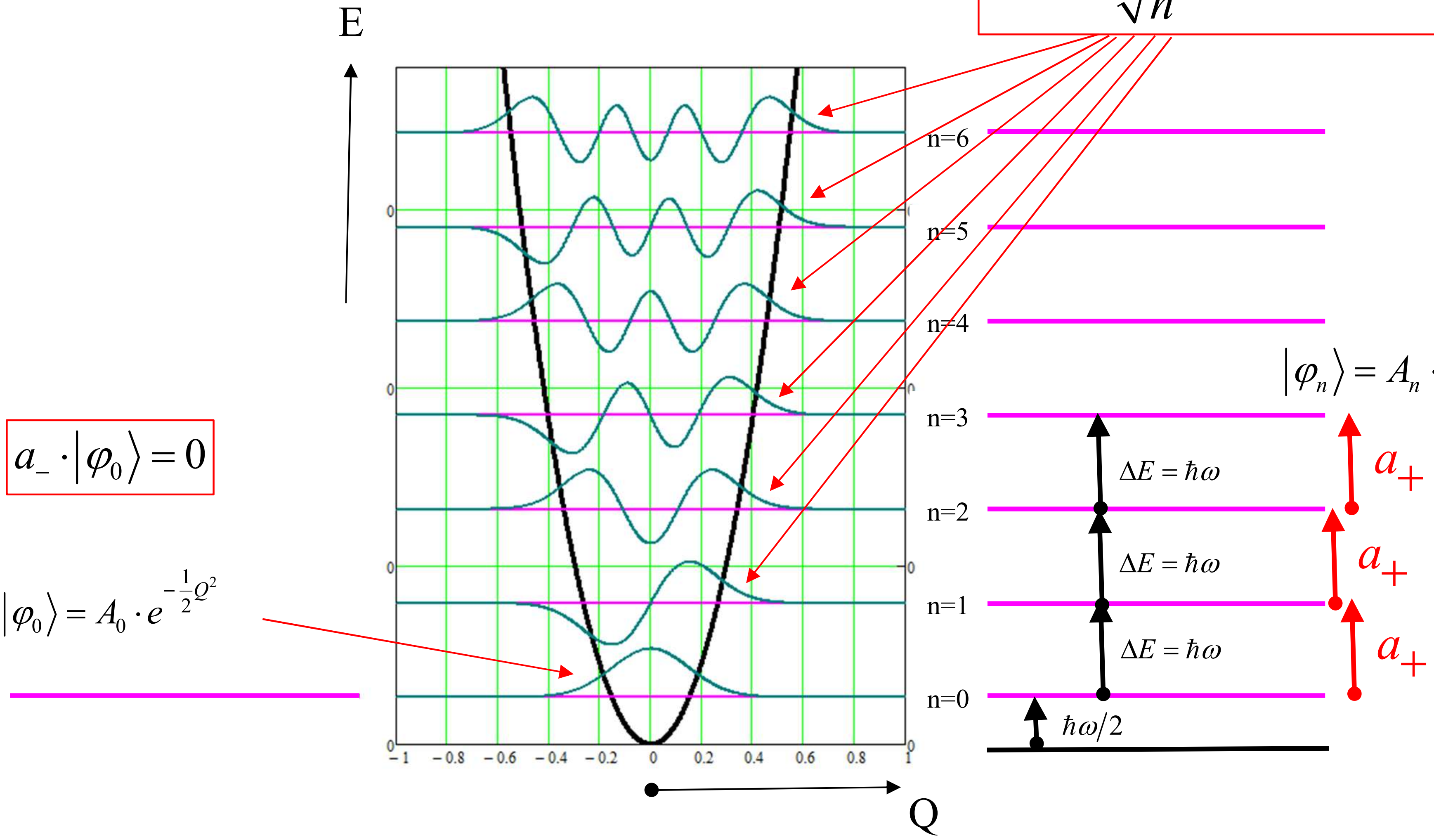
Modes de Fock

$$\left|\varphi_n\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot a_+ \cdot \left|\varphi_{n-1}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot a_+^n \cdot \left|\varphi_0\right\rangle$$

$$a_- \cdot \left|\varphi_0\right\rangle = 0$$

$$\left|\varphi_0\right\rangle = A_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}Q^2}$$

$$\left|\varphi_n\right\rangle = A_n \cdot e^{-\frac{1}{2}Q^2} \cdot H_n(Q)$$



PAB

Modes de Fock

Mode du vide:

$$a_- \cdot |\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(Q + \frac{\partial}{\partial Q}\right) |\varphi_0\rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad |\varphi_0\rangle = A_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}Q^2}$$

norme

Modes de N bosons:

$$|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot a_+ \cdot |\varphi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot a_+^n \cdot |\varphi_0\rangle$$

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q - \frac{\partial}{\partial Q}\right)$$

$$|\varphi_n\rangle = A_n \cdot e^{-\frac{1}{2}Q^2} \cdot H_n(Q)$$

Polynômes Hermite

norme

Annihilation

$$a_- \cdot |\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot a_- \cdot a_+^n \cdot |\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot \left(\underbrace{a_+^n a_- \cdot |\varphi_0\rangle}_{=0} + n \cdot a_+^{n-1} \cdot |\varphi_0\rangle \right)$$

$$= \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \cdot a_+^{n-1} \cdot |\varphi_0\rangle \right)$$

Opérateur d'annihilation: $\boxed{a_- |\varphi_n\rangle = \sqrt{n} \cdot |\varphi_{n-1}\rangle}$ $n = 0,1\ldots\infty$

Opérateur de création (rappel) : $\boxed{a_+ |\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1} \cdot |\varphi_{n+1}\rangle}$ $n = 0,1\ldots\infty$

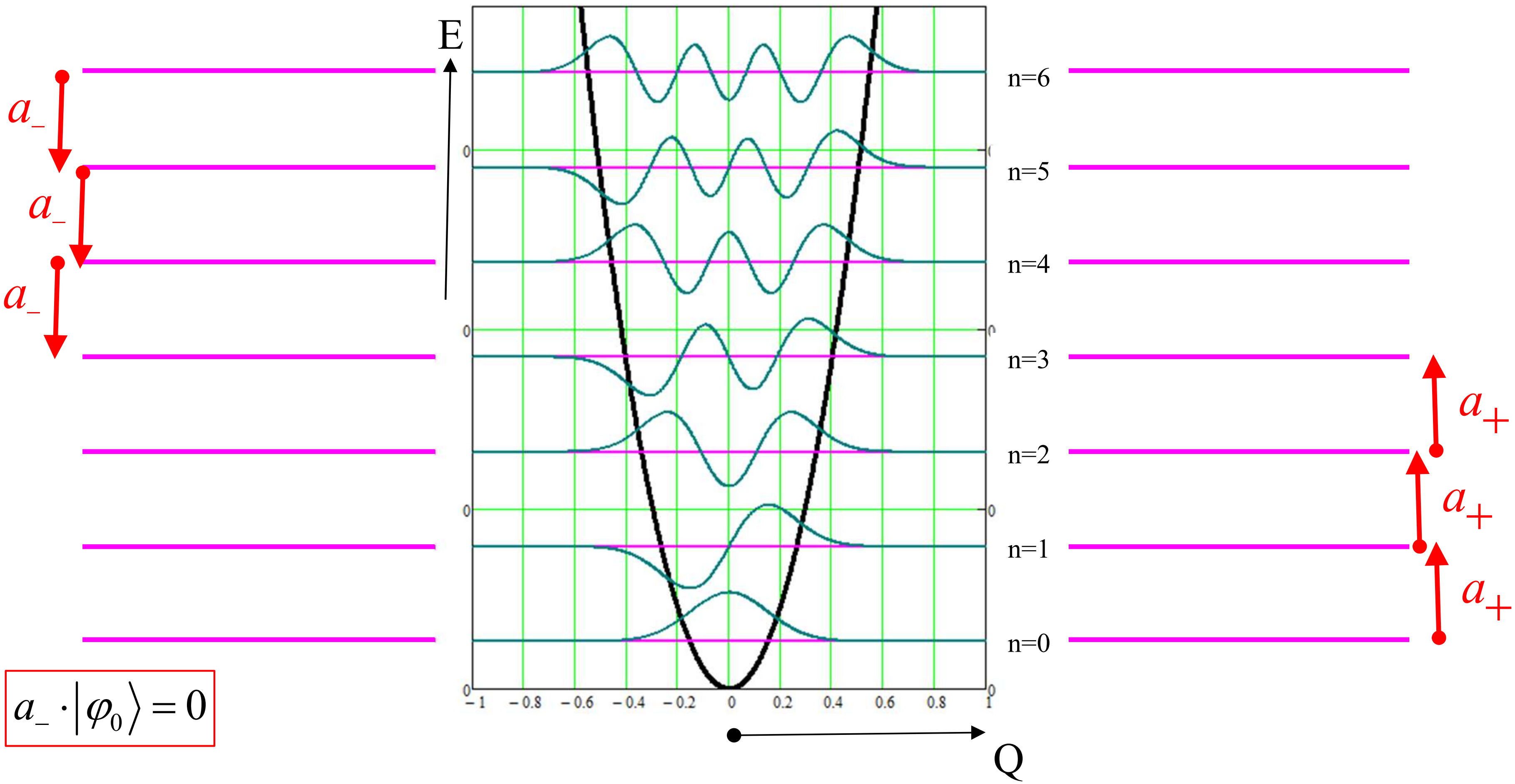
Oscillateurs quantiques

Annihilation:

$$\boxed{a_- \cdot |\varphi_n\rangle = \sqrt{n} \cdot |\varphi_{n-1}\rangle}$$

Création:

$$\boxed{a_+ \cdot |\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1} \cdot |\varphi_{n+1}\rangle}$$



$$\boxed{a_- \cdot |\varphi_0\rangle = 0}$$

Dénombrement et normes

Dénombrement:

$$a_+ a_- \cdot |\varphi_n\rangle = \sqrt{n} \cdot a_+ \cdot |\varphi_{n-1}\rangle = n \cdot |\varphi_n\rangle$$

⇨ Opérateur de dénombrement

$$\boxed{a_+ a_- \cdot |\varphi_n\rangle = n \cdot |\varphi_n\rangle}$$

Normes:

$$\langle\varphi_n||\varphi_n\rangle = \frac{1}{n}\langle\varphi_{n-1}|a_- a_+|\varphi_{n-1}\rangle = \frac{1}{n}\left(\langle\varphi_{n-1}|\overbrace{a_+ a_-}^{\text{Dénombrement = n-1}} + 1|\varphi_{n-1}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{n}(n-1+1) \cdot \langle\varphi_{n-1}||\varphi_{n-1}\rangle = \langle\varphi_{n-1}||\varphi_{n-1}\rangle = \langle\varphi_{n-2}||\varphi_{n-2}\rangle = \ldots = \langle\varphi_0||\varphi_0\rangle = 1$$

⇨ Toutes les fonctions d'onde sont normées

$$\boxed{\langle\varphi_n||\varphi_n\rangle = 1 \quad n = 0, 1, \ldots\infty}$$

Interprétation de l'Hamiltonien

$$H = \hbar\omega \cdot \frac{\left(P^2 + Q^2\right)}{2}$$

n bosons **Energie du vide**

$$\boxed{H = \hbar\omega \cdot \left(a_+ \, a_- + \frac{1}{2} \right) \quad \Rightarrow E_n = \hbar\omega \cdot \left(n + \frac{1}{2} \right)}$$

$$\boxed{H = \hbar\omega \cdot \left(\frac{a_+ \, a_- + a_- \, a_+}{2} \right)}$$

L'Hamiltonien:
- **annihile puis crée**
- **crée puis annihile**

un boson

PAB

Exemples d'Hamiltoniens

Energie cinétique: $H_{cin} = \frac{1}{2m} P^2$

Energie potentielle d'un ressort: $H_{\kappa} = \frac{\kappa}{2} X^2$

Energie capacitive: $H_C = \frac{1}{2C} Q^2$

Energie inductive $H_L = \frac{1}{2L} \phi^2$

Flux magnétique

Energie électrique: $H_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$

Energie magnétique: $H_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

Energie d'interaction électromagnétique: $H_{\text{inter}} = -\gamma \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$

Moment magnétique

Interactions spin-spin: $H_J \cong -\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$

...

Oscillateur harmonique: Solution par le théorème d'Ehrenfest

Oscillateur harmonique

Hamiltonien:

$$\boxed{H = \hbar\omega \cdot \frac{\left(P^2 + Q^2\right)}{2}}$$

$$[Q, P] = i$$

Commutateurs:

$$\left[Q, P^2\right] = QP \cdot P - P \cdot PQ = QP \cdot P - PQ \cdot P + P \cdot QP - P \cdot PQ = [Q, P] \cdot P + P \cdot [QP]$$
$$= i \cdot P + P \cdot i = 2i \cdot P$$

$$\left[P, Q^2\right] = PQ \cdot Q - Q \cdot QP = PQ \cdot Q - QP \cdot Q + Q \cdot PQ - Q \cdot QP = [P, Q] \cdot Q + Q \cdot [PQ]$$
$$= -i \cdot Q + Q \cdot -i = -2i \cdot Q$$

$$\boxed{\left[Q, P^2\right] = 2i \cdot P}$$

$$\boxed{\left[P, Q^2\right] = -2i \cdot Q}$$

Oscillateur harmonique

Ehrenfest:

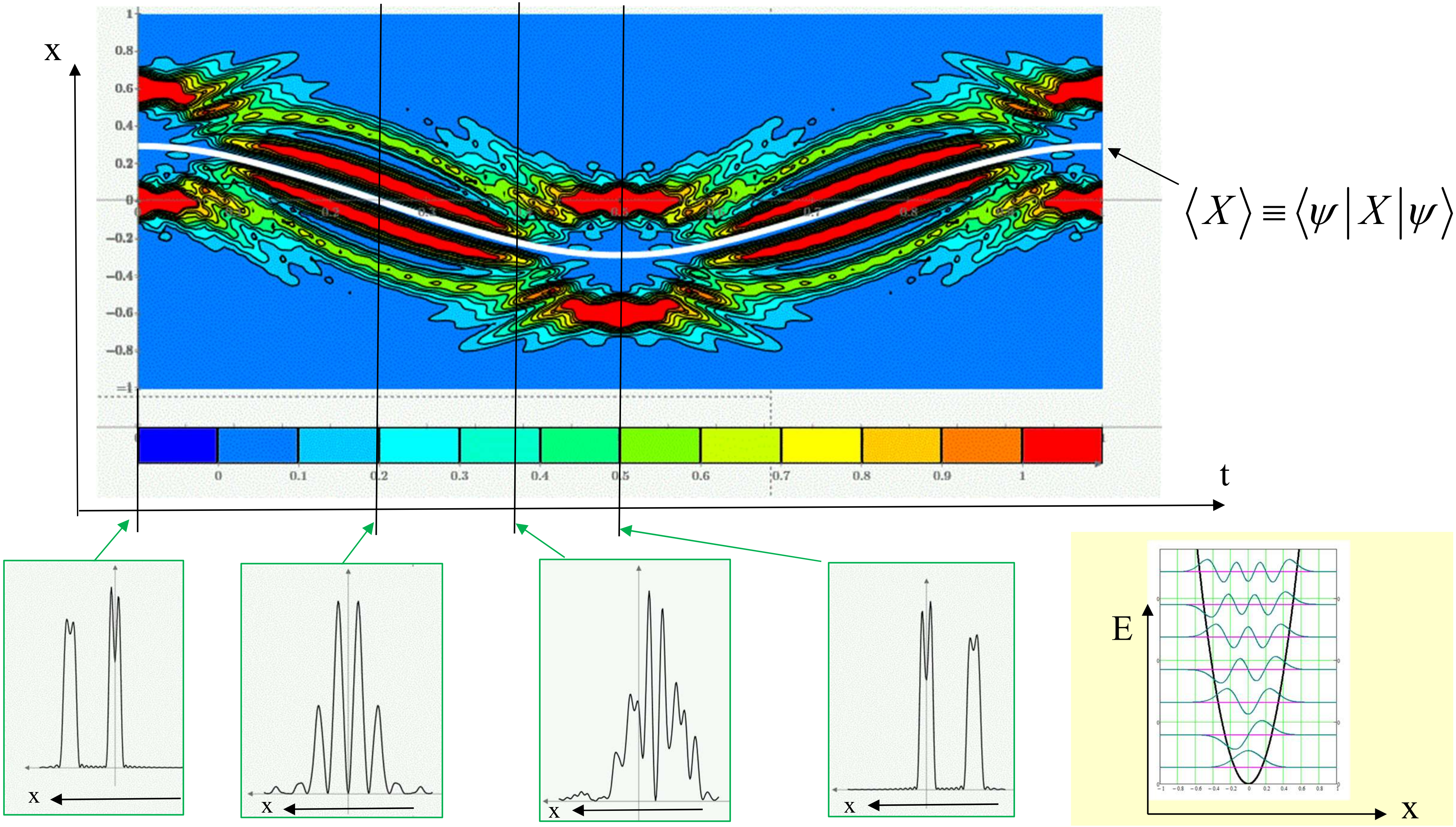
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle A\rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\langle Q\rangle &= \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t}\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle [Q,H]\rangle = 0 + \frac{1}{i\hbar}\left\langle \left[Q, \frac{\hbar\omega}{2}P^2\right]\right\rangle = \omega\cdot\langle P\rangle \\ \frac{\partial}{\partial t}\langle P\rangle &= \left\langle \frac{\partial P}{\partial t}\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle [P,H]\rangle = 0 + \frac{1}{i\hbar}\left\langle \left[P, \frac{\hbar\omega}{2}Q^2\right]\right\rangle = -\omega\cdot\langle Q\rangle \end{aligned}\right\}$$

Solutions classiques

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\langle Q\rangle = \omega\frac{\partial}{\partial t}\langle P\rangle = -\omega^2\langle Q\rangle \qquad \Rightarrow \quad \langle Q\rangle \cong A\cdot\cos(\omega\cdot t) + B\cdot\sin(\omega\cdot t)}$$

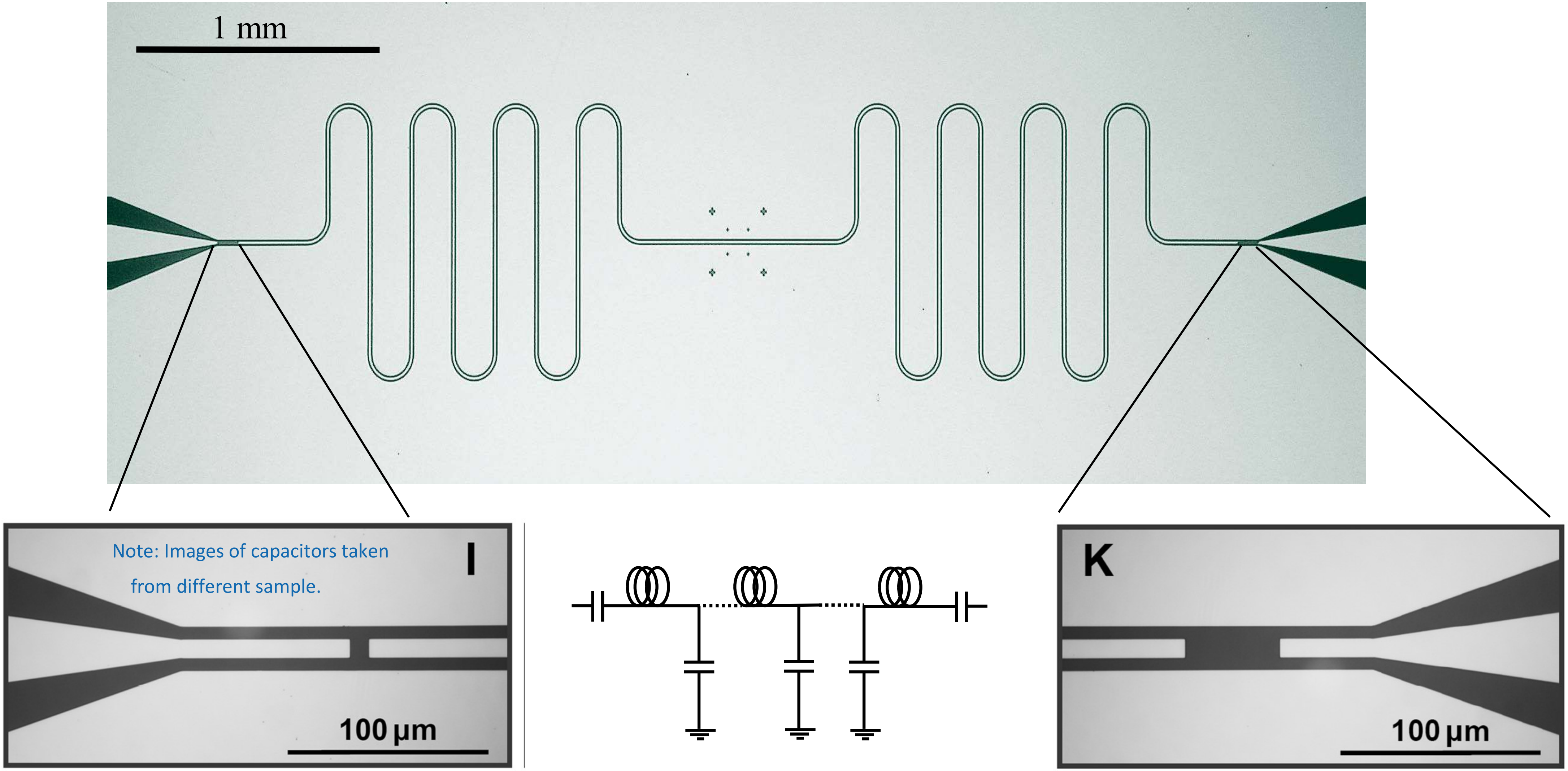
Exemple



$$\langle X \rangle \equiv \langle \psi | X | \psi \rangle$$

Oscillateur LC

Distributed coplanar waveguide resonators



M. Goeppl et al., J. Appl. Phys. 104, 113904 (2008)

PAB

Hamiltonien LC et variables canoniques

Flux magnétique

Charge:

$$\mathbb{Q} = C \cdot U = -C \cdot \dot{\phi}$$

Hamiltonien:

$$\boxed{H = \frac{1}{2C} \cdot \mathbb{Q}^2 + \frac{1}{2L} \cdot \phi^2 \qquad = \frac{1}{2}\frac{1}{C} \cdot p^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{L} \cdot q^2}$$

Variables canoniques:

$$q \equiv \phi \qquad p = C \cdot \dot{\phi} = -\mathbb{Q} \qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{1}{C}\frac{1}{L}}$$

Commutateur:

$$\boxed{[q, p] = -[\phi, \mathbb{Q}] = i\hbar}$$

Hamiltonien LC

$$\boxed{H = \hbar\omega \cdot \frac{\left(P^2 + Q^2\right)}{2}}$$

$$P \equiv \sqrt{\frac{1}{C}\frac{1}{\hbar\omega}} \cdot p = -\sqrt{\frac{1}{C}\frac{1}{\hbar\omega}} \cdot \mathbb{Q}$$

$$Q \equiv \sqrt{\frac{1}{L}\frac{1}{\hbar\omega}} \cdot q = \sqrt{\frac{1}{L}\frac{1}{\hbar\omega}} \cdot \phi$$

$$[Q, P] = i$$

$$P = -i\frac{\partial}{\partial Q}\ldots$$

«Opérateur de création»:

$$a_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \phi + i\frac{1}{\sqrt{C}} \cdot \mathbb{Q}\right)$$

«Opérateur d'annihilation»:

$$a_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\frac{1}{\sqrt{L}} \cdot \phi - i\frac{1}{\sqrt{C}} \cdot \mathbb{Q}\right)$$

$$\boxed{H = \hbar\omega \cdot \left(a_+ \, a_- + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\boxed{\left[a_-, a_+\right] = 1}$$

Charges et flux magnétique

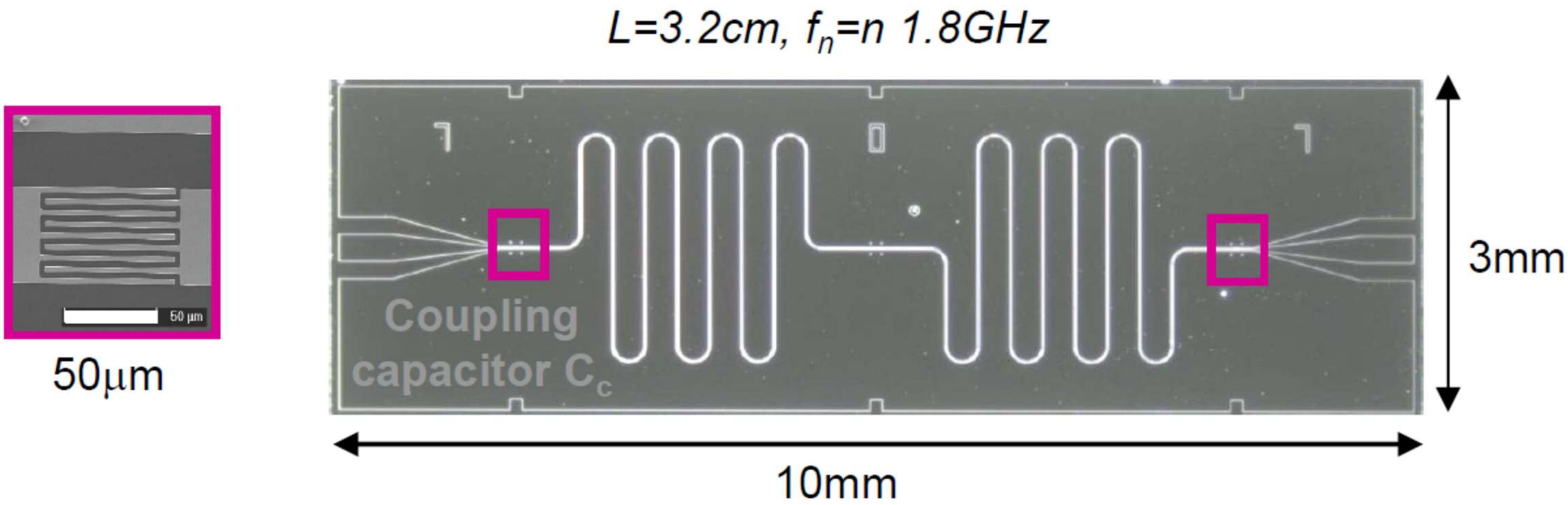
$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\cdot\phi + i\frac{1}{\sqrt{C}}\cdot\mathbb{Q}\right)$$

$$a_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\cdot\phi - i\frac{1}{\sqrt{C}}\cdot\mathbb{Q}\right)$$

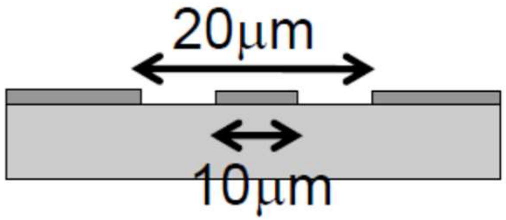
$$\mathbb{Q} = -i\cdot\sqrt[4]{\frac{\hbar^2\cdot C}{4\cdot L}}\cdot\left(a_+ - a_-\right)$$

$$\phi = \sqrt[4]{\frac{\hbar^2\cdot L}{4\cdot C}}\cdot\left(a_+ + a_-\right)$$

Exemple: résonateur LC sur puce



Typical lateral dimensions :



CEA Saclay

Microstripe or coplanar waveguide

Oscillateur électro-magnétique (E-B)

Vecteur potentiel A et Hamiltonien EM

$$div(B)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=\nabla\times A}$$

$$rot(E)=-\frac{\partial B}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E=-grad(\overset{0}{\cancel{\phi}})-\frac{\partial A}{\partial t}}$$

Lagrange:

$$L=V\cdot\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\right)=\frac{1}{2}V\varepsilon_0\cdot\left(\dot{\mathrm{A}}\right)^2-\frac{1}{2}V\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times A)^2$$

volume

Variables canoniques $\boxed{q\equiv\sqrt{V}\cdot A}$ $\boxed{p\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=\sqrt{V}\varepsilon_0\cdot\dot{\mathrm{A}}=-\sqrt{V}\varepsilon_0\cdot E}$ $\left[q,p\right]=i\hbar$

$$H=V\cdot\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\cdot E^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{H=\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot p^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}k^2\cdot q^2}$$

Hamiltonien EM normalisé

Hamiltonien

$$\boxed{H=\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot p^2+\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}k^2\cdot q^2}$$

$$[q,p]=i\hbar$$

Fréquence

$$\boxed{\omega\equiv\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\mu_0}k^2}=c\cdot k}$$

Variables canoniques normalisées

$$\boxed{P=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\cdot\hbar\omega}}\cdot p=-\sqrt{\frac{V\varepsilon_0}{\hbar\omega}}\cdot E}\qquad\boxed{Q=\sqrt{\frac{k^2}{\mu_0\cdot\hbar\omega}}\cdot q}\qquad\boxed{[Q,P]=i}$$

Hamiltonien normalisé

$$\boxed{H=\hbar\omega\cdot\frac{\left(P^2+Q^2\right)}{2}}$$

Création - annihilation

Création $$a_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q - iP\right)$$

Annihilation $$a_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q + iP\right)$$

$$\left[a_-, a_+\right] = 1$$

$$H = \hbar\omega \cdot \left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \cdot \left(\frac{a_+ a_- + a_- a_+}{2}\right)$$

$$\omega = c \cdot k$$

EM fields pour une onde de propagation →

$$P = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(a_+ - a_-\right) = -\sqrt{\frac{V\varepsilon_0}{\hbar\omega}} \cdot E \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E = i\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\hbar\omega}{V}}\cdot\left(a_-\cdot e^{ikz-i\omega t} - a_+\cdot e^{-ikz+i\omega t}\right)}$$

$$B = \frac{\pm k}{\pm\omega} E = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cdot E \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B = i\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_0\cdot\omega^2}\cdot\frac{\hbar\omega}{V}}\cdot k\cdot\left(a_-\cdot e^{ikz-i\omega t} - a_+\cdot e^{-ikz+i\omega t}\right)}$$

Pour a-

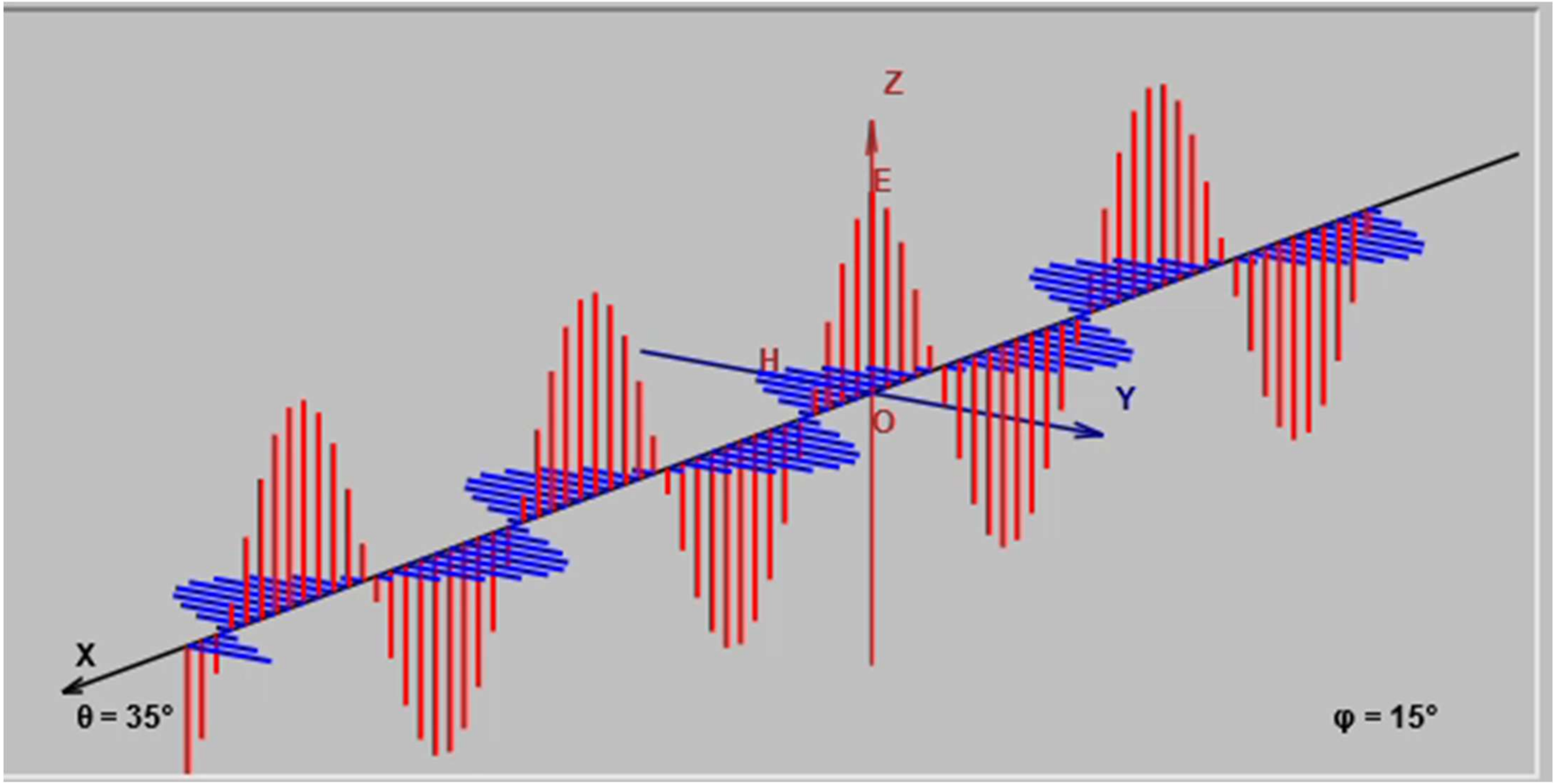
$$E = \pm i\omega\cdot A \quad \Longrightarrow \quad \boxed{A = \frac{1}{\omega}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\hbar\omega}{V}}\cdot\left(a_-\cdot e^{ikz-i\omega t} + a_+\cdot e^{-ikz+i\omega t}\right)}$$

Pour a+

PAB

Onde de propagation

https://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electri/oem1.html



Modes cohérents

Mode cohérent et son évolution

Modes de Fock

$$\left|\varphi_n\right\rangle = A_n \cdot e^{-\frac{1}{2}Q^2} \cdot H_n(Q)$$

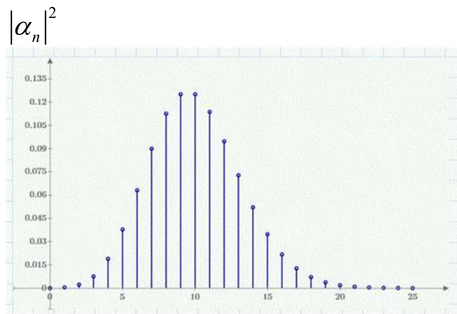
Polynômes Hermite

Valeurs propres:

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

Mode cohérent

$$\left|\varphi_c(0)\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{e^{-\langle n\rangle}\cdot\frac{\langle n\rangle^n}{n!}}\right)\cdot\left|\varphi_n\right\rangle$$



Distribution de Poisson en intensité

Evolution

$$\left|\varphi_c(t)\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{e^{-\langle n\rangle}\cdot\frac{\langle n\rangle^n}{n!}}\right)\cdot\left|\varphi_n\right\rangle\cdot e^{-i\cdot\frac{E_n}{\hbar}\cdot t}$$

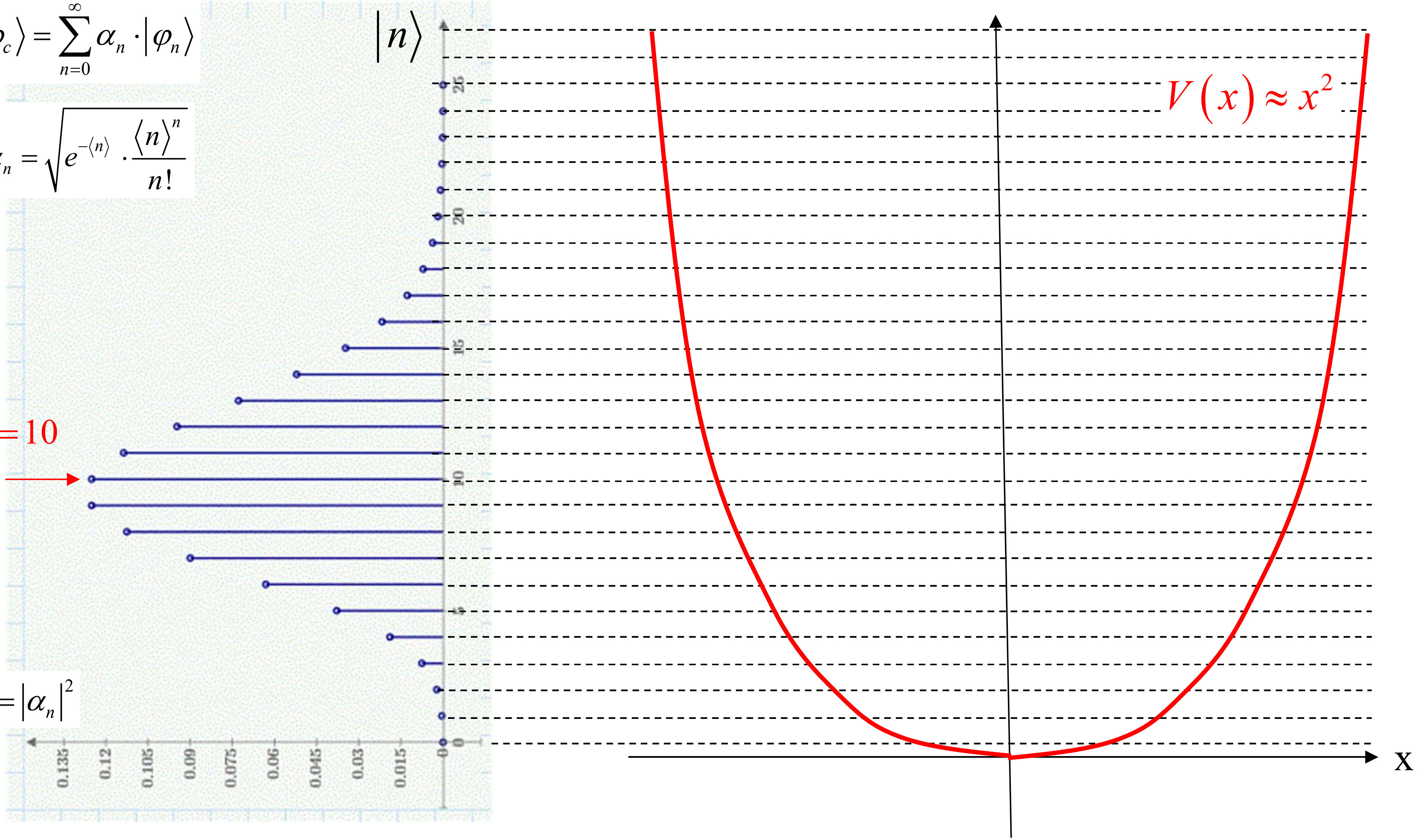
Distribution de Poisson et mode cohérent

$$|\varphi_c\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot |\varphi_n\rangle$$

$$\alpha_n = \sqrt{e^{-\langle n\rangle} \cdot \frac{\langle n\rangle^n}{n!}}$$

$$P_n = |\alpha_n|^2$$

$\langle n\rangle = 10$



Modes cohérents et opérateur d'annihilation

Mode cohérent

$$\boxed{\left|\varphi_c\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{\langle n\rangle}{2}}\sqrt{\frac{\langle n\rangle^n}{n!}}\right)\cdot\left|\varphi_n\right\rangle}$$

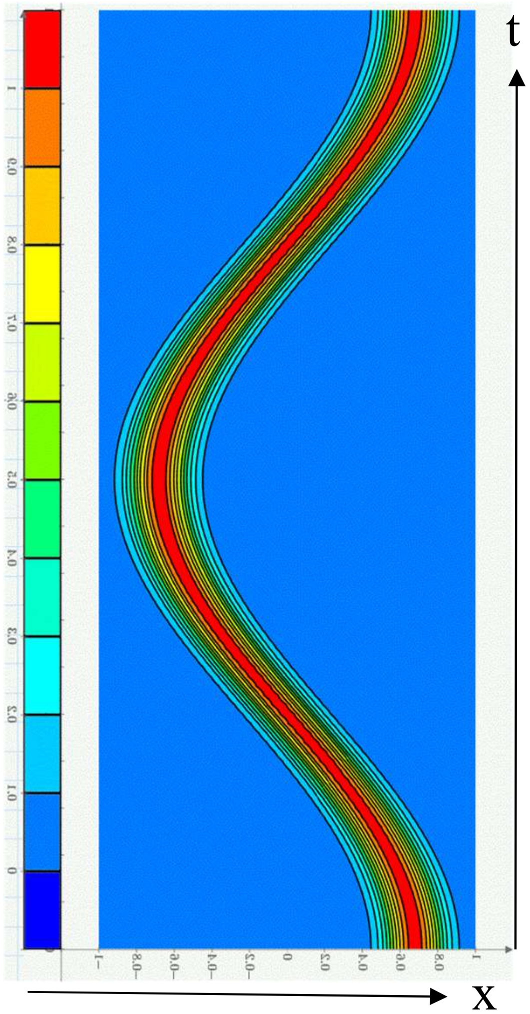
Mode propre:

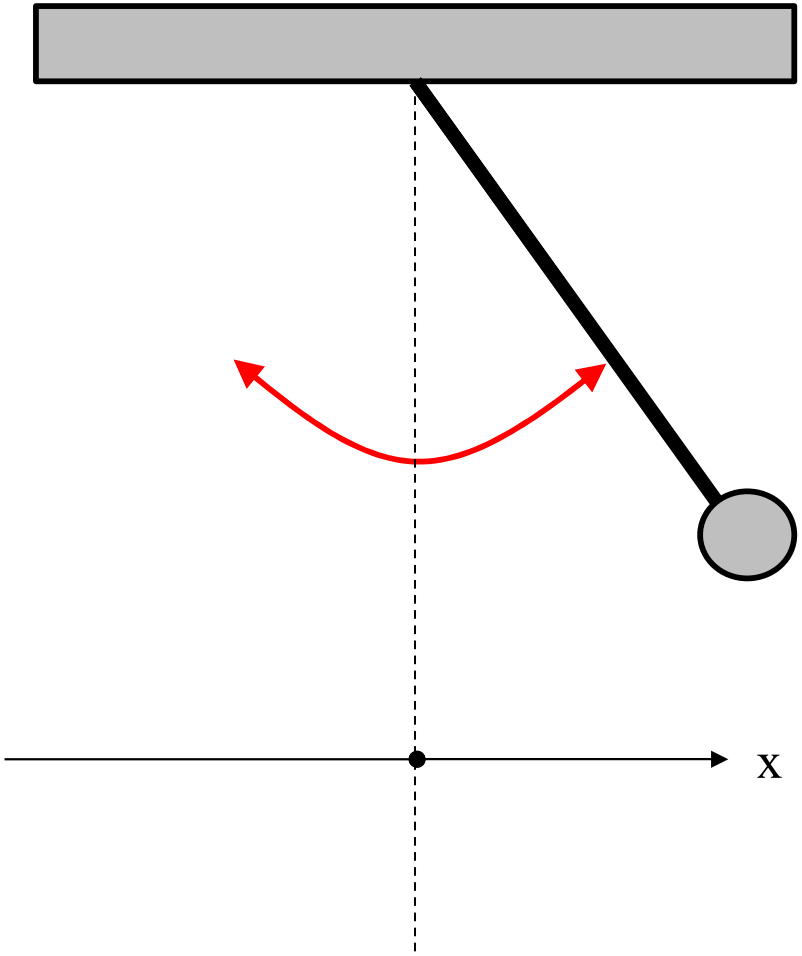
$$a_{-}\cdot\left|\varphi_c\right\rangle = \lambda\cdot\left|\varphi_c\right\rangle$$

Valeur propre

$$\boxed{\lambda = \sqrt{\langle n\rangle}}$$

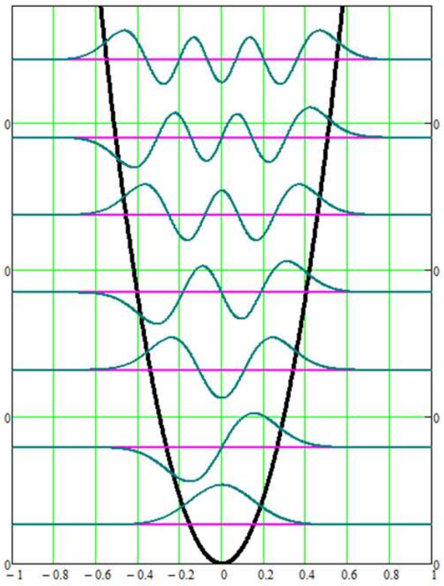
Pendule quantique

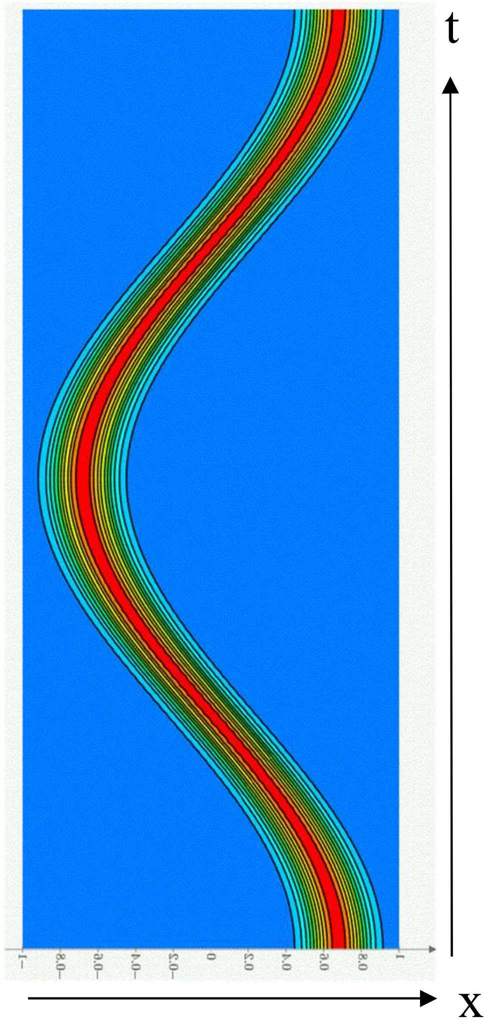




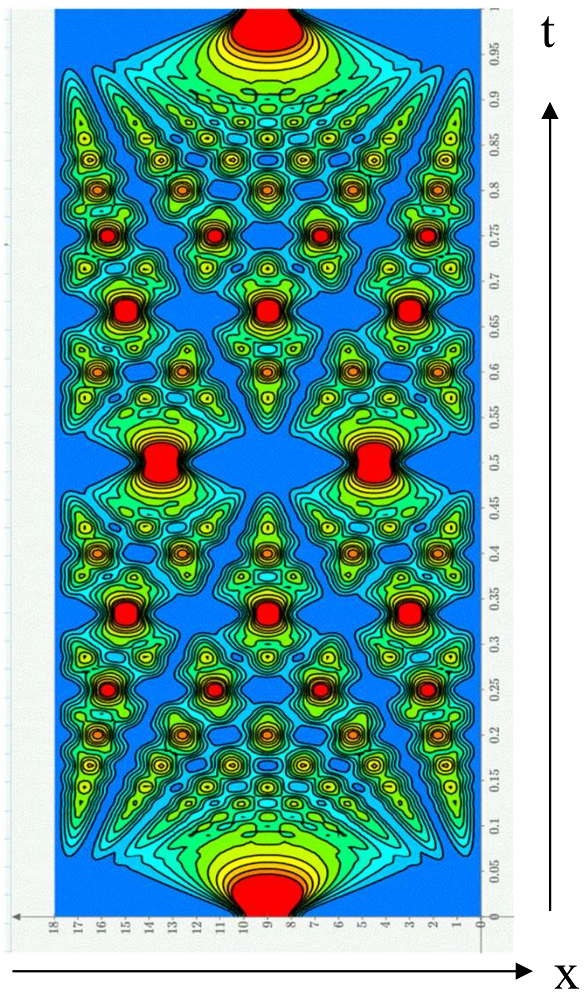
Rappel et comparaison

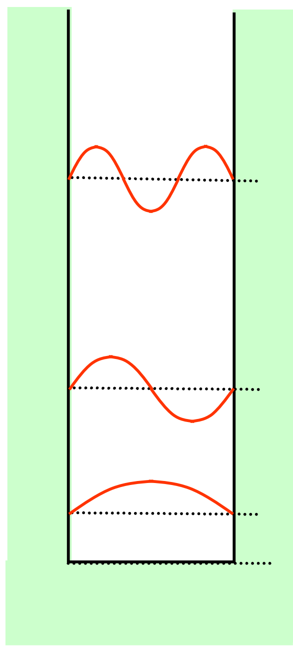
Puits quadratique et mode cohérent





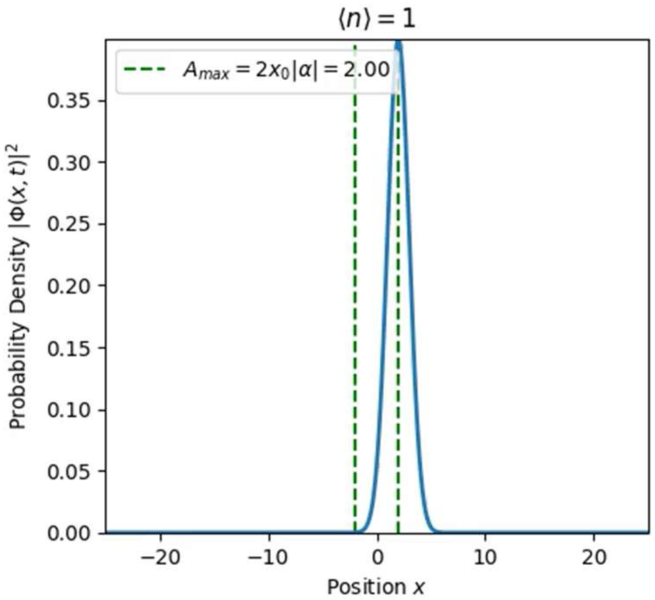
Puits rectangulaire et images multiples



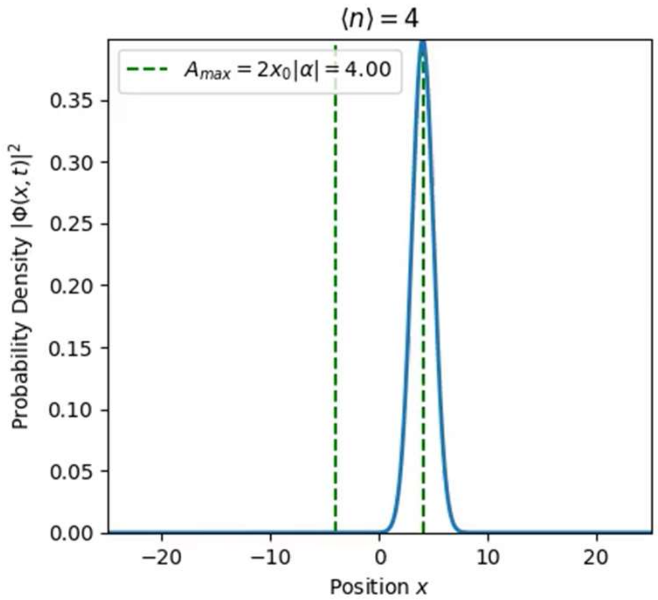


Modes cohérents: effet du nombre moyen de photons

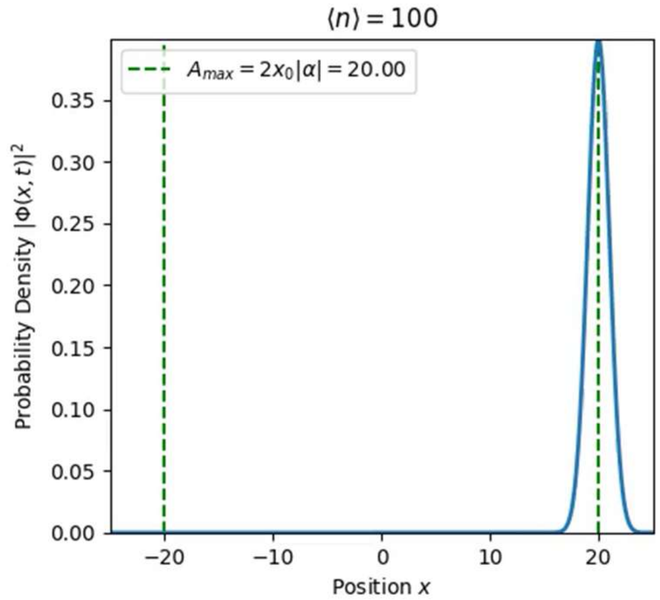
<n>=1



<n>=4



<n>=100

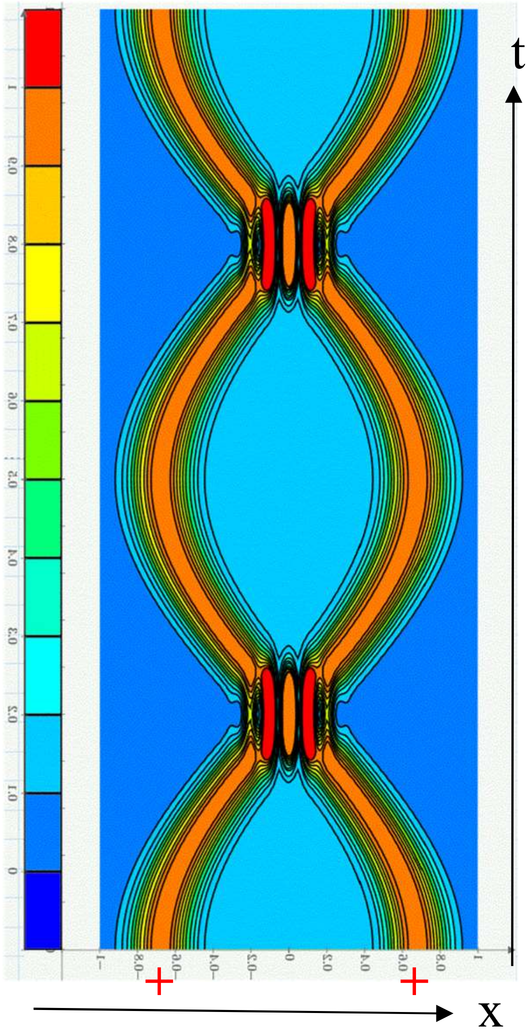


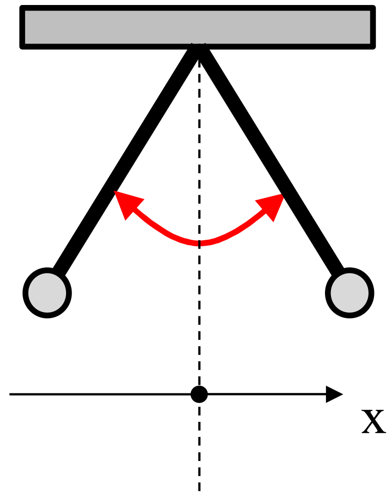
La fréquence est identique, mais l'amplitude augmente si <n> augmente

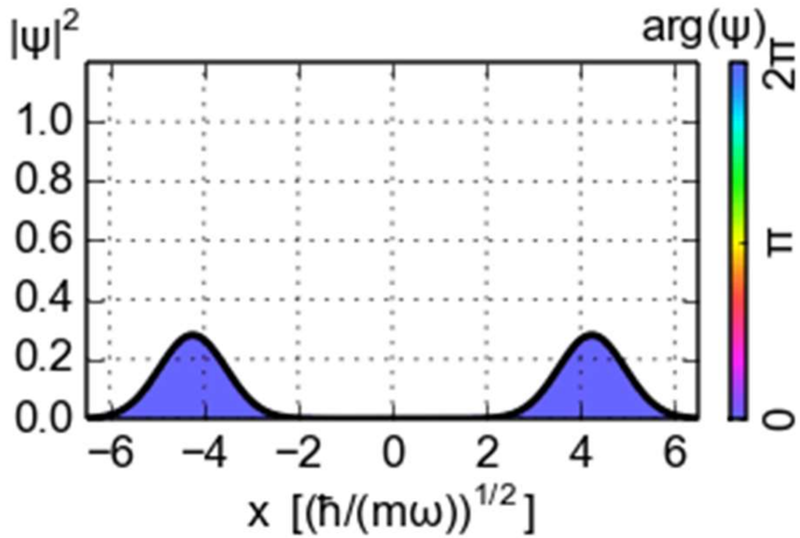
$$\boxed{A_{\max} \approx \sqrt{\langle n \rangle}}$$

Simulations par: Romain Nicolas Paul Couyoumtzelis

Pendules quantiques

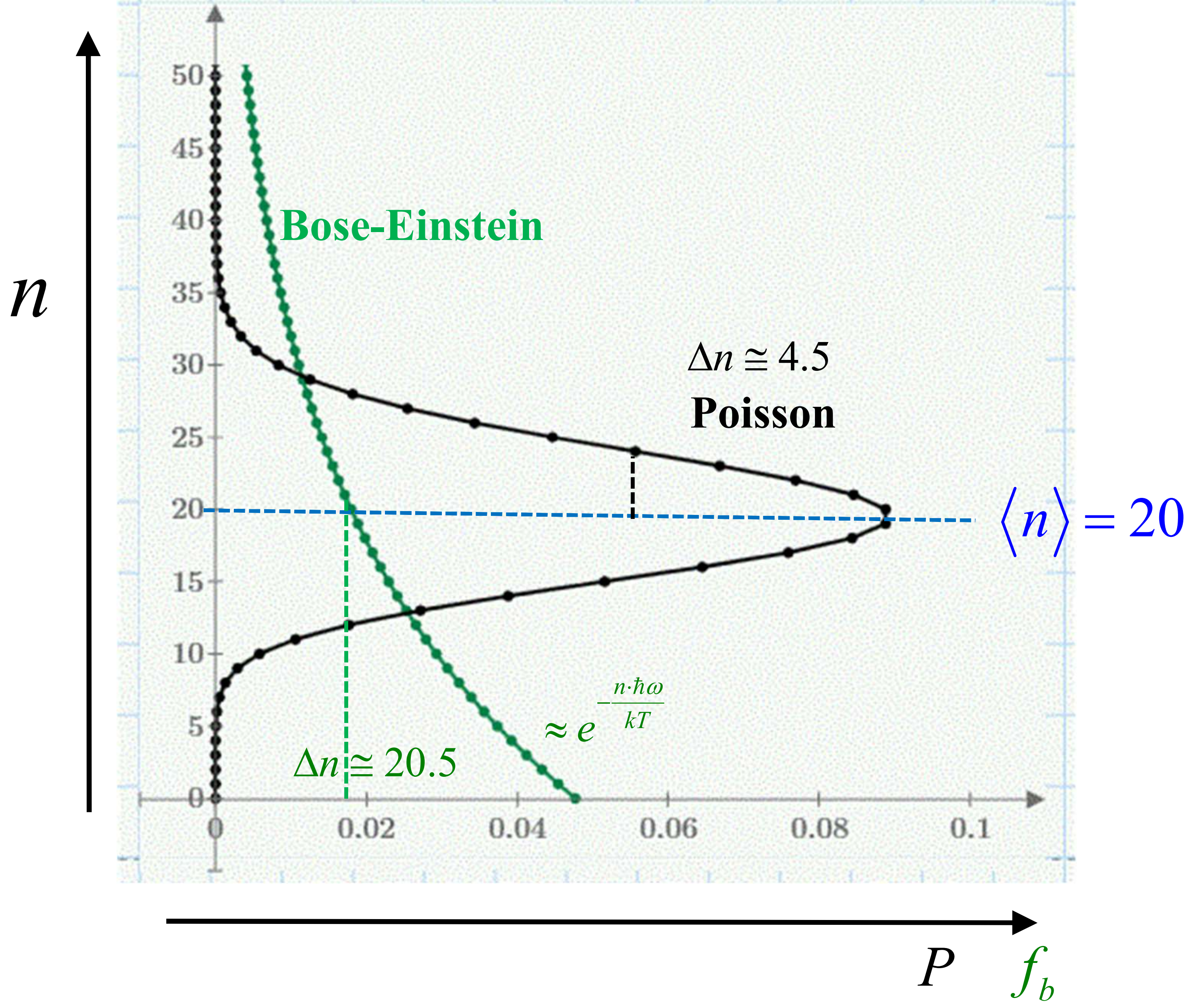






https://commons.wikimedia.org/wiki/File:QHO-catstate-even3-animation-color.gif

Rappel: Bose-Einstein comparé à Poisson



$$P(n) = \frac{1}{n!}\cdot\langle n\rangle^n \cdot e^{-\langle n\rangle}$$

$$\Delta n = \sqrt{\langle n\rangle}$$

$$f_b(n) = \frac{\langle n\rangle^n}{\left(\langle n\rangle + 1\right)^{n+1}}$$

$$\Delta n = \sqrt{\langle n\rangle\cdot\left(\langle n\rangle+1\right)} \cong \langle n\rangle$$

Modes photoniques

1) Modes de Fock:

«Fock» laser

$$\boxed{a_- \cdot |\varphi_0\rangle = 0}$$

$$\boxed{|\varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot a_+^n \cdot |\varphi_0\rangle}$$

$$\boxed{(a_+ a_-) \cdot |\varphi_n\rangle = n \cdot |\varphi_n\rangle}$$

$$\boxed{H \cdot |\varphi_n\rangle = \hbar\omega \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot |\varphi_n\rangle}$$

2) Modes cohérents:

Laser

$$\boxed{|\varphi_c\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{e^{-\langle n\rangle} \cdot \frac{\langle n\rangle^n}{n!}} \right) \cdot |\varphi_n\rangle}$$

Distribution de Poisson

$$\boxed{a_- \cdot |\varphi_c\rangle = \sqrt{\langle n\rangle} \cdot |\varphi_c\rangle}$$

3) Modes thermiques: (incohérents)

LED

$$\boxed{f_b(n) = \frac{\langle n\rangle^n}{(\langle n\rangle + 1)^{n+1}}}$$

Distribution de Bose-Einstein

Matrice densité

$$\boxed{\rho_{th}(\langle n\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\langle n\rangle^n}{(\langle n\rangle + 1)^{n+1}} \right) \cdot (|\varphi_n\rangle \cdot \langle\varphi_n|)}$$

$$\rho_{th} = \sum_{n=0}^{\infty} f_b(n) \cdot \rho_n$$

Exercice 8.1: matrices de création et d'annihilation

Les modes propres de l'oscillateur harmonique forment une base orthonormée:

$$\left|\varphi_n\right\rangle \quad n = 0, 1, \ldots \infty$$

Un mode superposé de cet oscillateur prend la forme: $\left|\psi\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left|\varphi_n\right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \ldots \end{pmatrix}$

Q: Ecrivez sous forme matricielle les opérateurs suivants:

$$a_+ = (?) \qquad a_- = (?) \qquad a_+ \cdot a_- = (?)$$

Exercice 8.2: Hamiltonien d'excitation

Considérons un résonateur LC harmonique.
Une capacité est utilisée pour l'exciter
par signal AC (V_e) à sa fréquence de résonance.

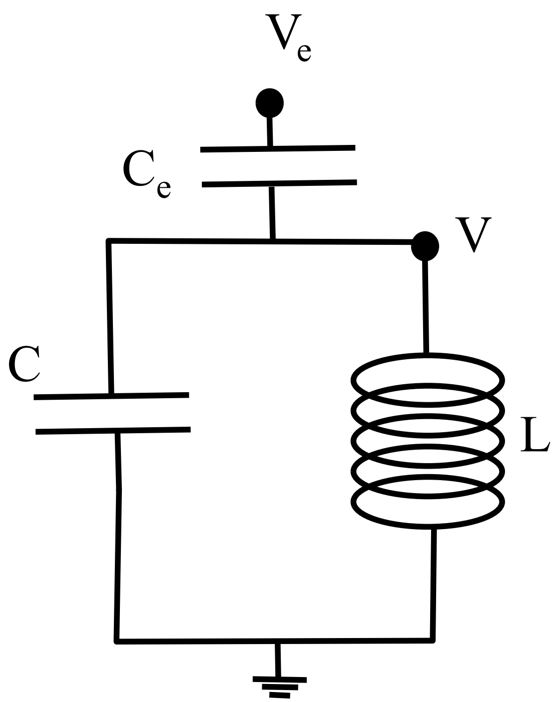
L'Hamiltonien contient un terme qui mélange
le signal d'excitation et la tension dans le circuit LC

$$H_e = \frac{1}{2} C_e \cdot \left(V_e - V\right)^2 \approx -C_e \cdot V_e \cdot V$$

La charge dans le circuit LC est donnée par:

$$\mathbb{Q} = -i \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot \left(C + C_e\right)}{4 \cdot L} \right)^{1/4} \cdot \left(a_+ - a_-\right)$$

Oscillateur Harmonique LC



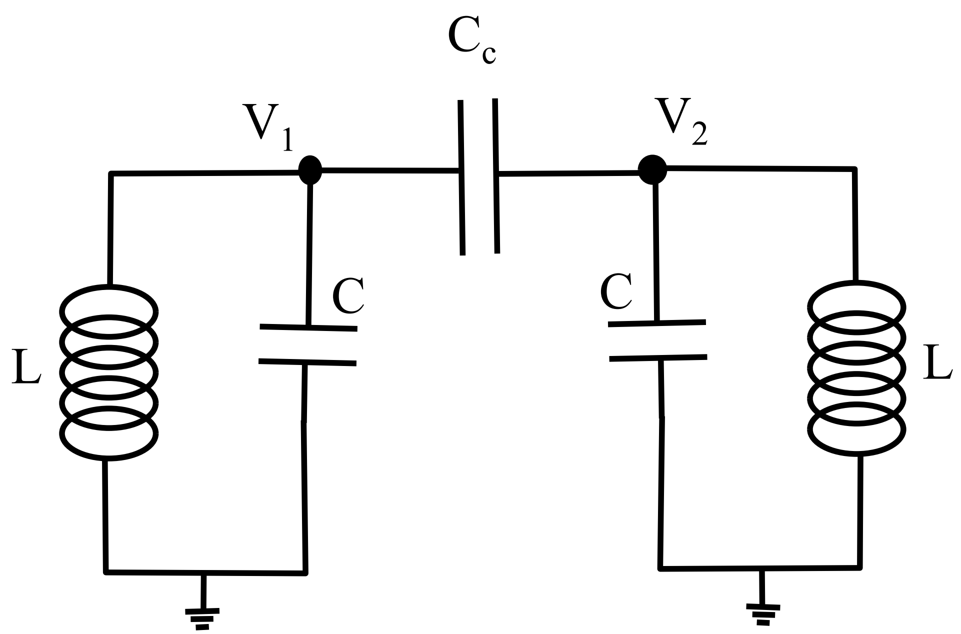
- **Exprimez cet Hamiltonien H_e en fonction des opérateurs de création et d'annihilation**

- **Ecrivez cet Hamiltonien H_e sous forme matricielle**

PAB

Exercice 8.3: Hamiltonien de couplage

Considérons deux résonateurs LC identiques.
Une capacité est utilisée pour les coupler.



L'Hamiltonien contient un terme de couplage entre les deux circuits.
Inspirez-vous de l'exercice précédent pour exprimer ce terme

$$H_c = \frac{1}{2} C_c \cdot \left(V_1 - V_2\right)^2 \approx \ldots$$

Utilisez les expressions de la charge dans chaque circuit pour exprimer cet Hamiltonien de couplage en fonction des opérateurs de création et d'annihilation des deux circuits.

ATTENTION: ne vous lancez pas dans une analyse matricielle !!

Exercice 8.4

Pourquoi la probabilité de trouver une particule augmente dans les bords ?